Advertencia

Estas son mis soluciones a los ejercicios de la práctica de métodos numéricos, no garantizo su completitud ni correctitud. Cualquier mejora es bienvenida en el repo TBD.

Contenidos

Practica 3

Ejercicio 2

Si pudiéramos escribir a A como lo describe el ejercicio tendríamos

$$A = S + T = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

Usando las propiedades de simetría de S y antisimetria de de T podemos reescribir esto cómo:

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{21} & \dots & s_{n1} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_{11} & -t_{21} & \dots & -t_{n1} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & -t_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

Vamos a ver como elegir los s_{ij} y t_{ij} para cumplir esta descomposición.

Como T es antisimétrica su diagonal solo puede ser 0 entonces nos limita a que $t_{ii} = 0$ y que $a_{ii} = s_{ii}$. Ahora si tomamos a_{21} y a_{12}, si lo expresamos como función de S y T tenemos que

$$s_{21} + t_{21} = a_{12}$$
$$s_{21} - t_{21} = a_{21}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas asi que tiene solución única, resolviéndolo

$$s_{21} = \frac{a_{21} + a_{12}}{2}$$
$$t_{21} = \frac{a_{21} - a_{12}}{2}$$

Podemos repetir esto con las otras entradas de A obteniendo las mismas condiciones para todas las entradas de S y T, por construcción estas matrices son simétrica y antisimétrica respectivamente.

Ejercicio 3

a)

Basta con mostrar un ejemplo, es fácil ver que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Es definida positiva pero no simétrica.

b)

No, demos un contraejemplo

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

c)

Si, una matriz diagonal D (que tenga algún elemento de la diagonal distinto de 1), tomamos $A = D$ y $B = D^2$, AB es simétrica.

Ejercicio 4

a)

Este ejercicio es un poco difícil asi que voy a dar un par de ideas para ir pensando sin escribir la solución de una, al final de los hints está la solución.

Hint 1: es el de la práctica: usar $\phi(\lambda) = (x + \lambda y)^t A(x + \lambda y)$ e intentar concluir algo.

Hint 2: al expandir lo de arriba ver dos cosas, que $\phi(\lambda) > 0$ y que lo que tenemos es una función cuadrática, ver que pasa con el discriminante.

Hint 3: Recordar lo siguiente, cuando resolvíamos una ecuación cuadrática teníamos la siguiente fórmula

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

Si $b^2 - 4ac > 0$ entonces teníamos dos soluciones distintas, si $b^2 - 4ac = 0$ teníamos una raíz doble y si $b^2 - 4ac < 0$ teníamos soluciones complejas, osea no teníamos 0 en los reales. Por qué nos importa esto? Porque $\phi(\lambda) > 0$ es decir siempre tenemos el tercer caso.

Solución: Primero veamos que $\phi(\lambda) > 0$. A es sdp y como x e y son linealmente independientes $x + \lambda y$ nunca puede ser 0 por lo cual $\phi(\lambda) > 0$.

Expandiendo $\phi(\lambda)$ tenemos

$$\phi(\lambda) = (x + \lambda y)^t A(x + \lambda y) =$$
$$(x + \lambda y)^t (Ax + A\lambda y) = x^t Ax + x^t A\lambda y + \lambda y^t Ax + \lambda^2 y^t Ay =$$

Y usando la simetría de A

$$x^t Ax + 2x^t A\lambda y + \lambda^2 y^t Ay$$

Ahora si consideramos a esto como una función cuadrática dependiente en λ y escribimos el discriminante ($b^2 - 4ac$) tenemos que, por lo que discutimos antes

$$(2x^t Ay)^2 - 4(x^t Ax)(y^t Ay) < 0$$

Que es lo que queríamos probar.

b)

Podemos repetir lo anterior solo diciendo que tenemos una raíz en $\phi(\lambda)$ (¿Por qué?) y que el discriminante es 0 o podemos expandir $|x^t Ay|$ directamente asumiendo que $y = kx$.

Ejercicio 5

Solo demuestro la desigualdad triangular, el resto debería salir fácil.

Hint: Tomar cuadrado de la expresión, acotar con el ejercicio anterior y completar el cuadrado que queda.

Dem:

$$f(x+y)^2 =$$

$$\frac{1}{4}|x^tAx + 2x^tAy + y^tAy| \leq$$

$$\frac{x^tAx}{4} + \frac{|x^tAy|}{2} + \frac{y^tAy}{4} \leq$$

$$\frac{x^tAx}{4} + \frac{\sqrt{x^tAx}\sqrt{y^tAy}}{2} + \frac{y^tAy}{4} =$$

$$(f(x) + f(y))^2$$

Ejercicio 6

a)

$$a = (1,0)^tA(1,0) \ > 0$$

b)

$$b = (0,1)^tA(0,1) > 0$$

Ejercicio 7

a)

Es generalizar lo del ejercicio 6a) y 6b) con

$$a_{ii} = e_i^tAe_i > 0$$

b)

A es singular si existe un $x \neq 0$ tal que $Ax = 0$. Supongamos entonces que A es singular, tenemos que

$$0 = x^t 0 = x^t Ax > 0$$

Contradicción, vino de suponer A singular.

c)

Para la submatriz de tamaño $k \times k$ solo hace falta tomar

$$v = (v_1, \ldots, v_k, 0, \ldots, 0)$$

Entonces

$$v^t Av > 0$$

Pero esto es lo mismo que multiplicar la submatriz principal A_{kk} por el vector $v_{kk} = (v_1, \ldots, v_k)$.

d)

$$|a_{ij}|^2 = |e_i^t Ae_j|^2$$

Ahora usando el ejercicio 4 y el 7a) tenemos

$$|e_i^t Ae_j|^2 < \left(\sqrt{e_i^t Ae_i}\sqrt{e_j^t Ae_j}\right)^2 = a_{ii}a_{jj}$$

Ejercicio 8

Vamos a probar que es definida positiva ya que la simetría sale trivialmente, como A se descompone como una multiplicación de una matriz por su transpuesta, entonces si tomamos un $x \neq 0$, tenemos

$$x^t Ax = x^t LL^t x = (L^t x)^t (L^t x) = \|L^t x\|_2^2 \geq 0$$

Pero además sabíamos que la diagonal de L era positiva es decir que $\det(L) > 0$, por lo cual L es no singular y para todo $x \neq 0$ tenemos $L^t x \neq 0$ de lo cual concluimos su positividad.

Ejercicio 9

Nota: esta propiedad se conoce como criterio de Sylvester, las demostraciones que encontré difieren bastante de lo que se ve en la materia o usan temas que todavía no se vieron. No estoy muy seguro de mi demostración.

Recordemos de la teórica que si la matriz era simétrica podíamos escribirla como

$$A = LDL^t$$

Y luego usábamos la positividad para ver que la matriz diagonal D era toda positiva, descomponer D en $\sqrt{D}\sqrt{D}$ y juntar cada uno con L y L^t para llegar a una descomposición de Cholesky.

Entonces lo que queremos probar en definitiva es que bajo las hipótesis del ejercicio D es una diagonal con todas sus entradas positivas.

Que sabemos hasta ahora, sabemos que A es simétrica ($A = LDL^t$), sabemos que cada submatriz principal tiene determinante positivo y que la diagonal de las L son unos (por descomposición LU).

También sabemos que el determinante de LDL^t es $\prod_{i=0}^{n} d_i > 0$, pero esto no alcanza para probar que cada $d_i > 0$.

Intentemos descomponer la matriz en bloques e intentar usar inducción.

El caso base es la matriz principal de 1×1, se puede ver que esto es igual a d_1 y por lo tanto $d_1 > 0$.

Supongamos que vale hasta $n-1$ y consideremos la siguiente formulación en bloques de $A = LDL^t$.

$$\tilde{L}D\tilde{L}^t = \left[\begin{array}{c|c} L & 0 \\ \hline l^t & l_{(n,n)} \end{array}\right] \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} L^t & l \\ \hline 0 & l_{(n,n)} \end{array}\right]$$

Si multiplicamos estas matrices vamos a tener que la matriz principal superior de $n-1 \times n-1$ es $LD_{n-1}L^t$

Por HI tenemos que D_{n-1} tiene toda su diagonal con valores positivos, ahora el último determinante es $\prod_{i=1}^{n} d_i$ de lo cual deducimos que $d_n > 0$ y esto termina la demostración.

Ejercicio 10

Es aplicar el criterio de Sylvester del ejercicio anterior.

Ejercicio 11

Idea: vamos a llevar a la matriz, luego de un paso de eliminación gaussiana, a un caso específico de la matriz original y luego concluir que si la submatriz resultante después de la eliminación gaussiana no es simétrica definida positiva entonces la matriz original tampoco lo era.

También vamos a hacer sólo el caso base, el paso inductivo sale muy parecido. Además vamos a asumir que $a_{11} = 1$ solo para simplificar un poco las cuentas.

Con eso aclarado la matriz sdp A queda de la siguiente manera

$$A = \begin{bmatrix} 1 & v^t \\ v & M \end{bmatrix}$$

Dónde $M \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$, una vez que hacemos el primer paso de eliminación gaussiana tenemos la siguiente descomposición (¿Por qué?).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & v^t \\ 0 & M - vv^t \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Por otro lado, si planteamos la definición de sdp con un vector expresado como la primer coordenada de dimension 1 y la segunda de dimensión $n-1$ tenemos:

$$(y, x)^t \begin{bmatrix} 1 & v^t \\ v & M \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} =$$

$$(y, x)^t \begin{bmatrix} y + v^t x \\ v_1 y + fila_1(M)^t x \\ \vdots \\ v_n y + fila_n(M)^t x \end{bmatrix} =$$

$$\begin{gathered} yy + yv^t x + \\ x_{21} v_1 y + x_{21} fila_1(M)^t x + \\ \vdots \\ x_{2n} v_n y + x_{2n} fila_n(M)^t x + \end{gathered}$$

Reordenando un poco tenemos

$$y^2 + 2yv^t x + x^t M x \tag{1.2}$$

Ahora supongamos que la submatriz de la ecuación 1.1 no es sdp (es fácil ver que es simétrica asi que solo podemos suponer que no es definida positiva) es decir que existe un x tal que

$$0 \geq x^t(M - vv^t)x$$

Expandiendo la parte de la derecha tenemos

$$x^tMx - x^tvv^tx \tag{1.3}$$

Ahora si miramos detenidamente 1.2 y elegimos $y = -x^tv$ tenemos la misma expresión es decir

$$(x^tv)^2 - 2(x^tv)v^tx + x^tMx = -(x^tv)^2 + x^tMx$$

Con lo cual concluimos que si hay un x que haga 1.3 no sdp entonces eligiendo (y, x) de la misma manera esto hace hace que la matriz original no sea sdp y por lo tanto llegamos a una contradicción que vino de suponer que $M - vv^t$ no era sdp.

Ejercicio 12

a)

$$x^tA^tx = (x^tAx)^t > 0$$

La vuelta sale igual.

b)

Si A definida positiva, por el ejercicio anterior A^t es def pos asi que se ve fácilmente que

$$\frac{A + A^t}{2}$$

es definida positivo.

Para la vuelta, tenemos que

$$\frac{A + A^t}{2}$$

es definida positiva, supongamos que A no lo es, por lo tanto existe un $x \neq 0$ tal que $Ax = 0$, ahora

$$x^t \frac{A+A^t}{2} x = \frac{x^tAx + x^tA^tx}{2} = \frac{x^tA^tx}{2} = \frac{(x^tAx)^t}{2} = 0$$

lo cual contradice que $(A+A^t)/2$ sea definida positiva.

c)

Idea: plantear definición de definida positiva con (x, y) un vector dónde $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}$ y usar el tercer hint del ejercicio 4.

Solución:

$$(x,y)^t \begin{bmatrix} AA^t & 2b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (x,y) =$$

$$(x,y)^t \begin{bmatrix} AA^tx + 2by \\ y \end{bmatrix} =$$

$$x^tAA^tx + x^t2by + y^2$$

Usando la idea del ejercicio 4, hace falta ver que el discriminante en función de y es < 0, queremos ver entonces si

$$4(x^tb)^2 - 4x^tAA^tx \overset{?}{<} 0$$

Ahora esto es lo mismo que

$$\|x^tb\|_2^2 - \|A^tx\|_2^2$$

$$\|x^tAA^{-1}b\|_2^2 - \|A^tx\|_2^2 \leq$$

Usando Cauchy-Schwartz

$$\|x^tA\|_2^2\|A^{-1}b\|_2^2 - \|A^tx\|_2^2 <$$

Usando que $\|A^{-1}b\|_2 < 1$ y que la norma de la transpuesta es la misma

$$\|A^tx\|_2^2 - \|A^tx\|_2^2 = 0$$

Ejercicio 13

Asumamos que tenemos dos descomposiciones de Cholesky para A,

$$A = LL^t = \tilde{L}\tilde{L}^t \tag{1.4}$$

Multiplicando por las inversas

$$\tilde{L}^{-1}L = \tilde{L}^t {L^t}^{-1}$$

Ahora la parte de la izquierda es una matriz triangular inferior y la de la derecha es una matriz triangular superior, por lo cual esta expresión es equivalente si son iguales a una matriz diagonal D.

$$\tilde{L}^{-1}L = \tilde{L}^t {L^t}^{-1} = D$$

De acá deducimos que

$$\tilde{L}D = L \quad \text{y que} \quad D\tilde{L}^t = L^t$$

Reemplazando en 1.4

$$A = \tilde{L}DD\tilde{L}^t = \tilde{L}\tilde{L}^t$$

Osea que $D^2 = I$, tomando raíz tenemos que $D = I$ y eso termina la demostración.

Ejercicio 14

Sale de forma muy parecida al ejercicio 15.

Usando inducción, $n = 1$ es trivial.

Supongamos que vale hasta $n - 1$ y tomemos la misma forma en bloques de LL^t del ejercicio 15, la submatriz $\hat{L}$ cumple la propiedad por HI.

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \hat{L} & 0 \\ \hline l^t & l_{n,n} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \hat{L}^t & l \\ \hline 0 & l_{n,n} \end{array}\right]$$

Queda la última fila de la matriz $\hat{L}$, supongamos que hay un elemento distinto de 0 que no es l_{nn} ni l_{nn-1}, es decir supongamos que L no es bidiagonal, tomemos además el primero que no es nulo, supongamos que está en la columna j con $j < n - 1$.

Al multiplicar LL^t para reconstruir A, tenemos que multiplicar la última fila de L por la columna j de L^t vemos que como L^t es 0 a partir de la fila $j+1$ hacia abajo y en la última fila es 0 antes de la columna j, todo se anula excepto $l_{nj}l_{jj}$, donde ambos son distintos de 0.

Es decir que en la posición nj de A nos queda un valor distinto de 0 con $j < n-1$, esto no puede pasar porque la matriz original era tridiagonal, llegamos a una contradicción que vino de suponer la existencia de un elemento distinto de 0 antes de la $n-1$-ésima columna de L. De lo cual concluimos que L es bidiagonal.

Ejercicio 15

Hint: Escribir A como una factorización de Cholesky por bloques y usar inducción.

Solución:

Como A sdp sabemos que se puede escribir como $\hat{L}\hat{L}^t$ con matrices de Cholesky, escribimos a $\hat{L}$ y $\hat{L}^t$ en bloques de la siguiente manera:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} L & 0 \\ \hline l^t & l_{(n,n)} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} L^t & l \\ \hline 0 & l_{(n,n)} \end{array}\right]$$

Ahora vamos a probar dos cosas, primero que la última columna cumple la condición del enunciado y luego que el resto lo cumple.

Entonces supongamos que $m(A,n) = k$, esto significa que $A_{(n,j)} = 0$ para $j < k$. Ahora cada elemento de la última fila es, el producto de l^t con las columnas de L^t donde recordemos, L^t es triangular superior. Por ejemplo:

$$A_{n,1} = l^t.columna_1(L^t) = l_1^t L_{1,1}^t$$

Ya que el resto de la primer columna de L^t es 0. Ahora si $k > 1$, entonces $A_{n,1} = 0$, de lo cual sale que $l_1^t = 0$. Siguiendo la misma idea veamos que pasa con $A_{n,2} = 0$ si $2 < k$, además

$$A_{n,2} = l^t.columna_2(L^t) = l_1^t L_{1,2}^t + l_2^t L_{2,2}^t$$

Ahora no sabemos si $L_{1,2}^t$ es igual o distinto a 0, pero sabemos que l_1^t es 0 y además $L_{2,2}^t \neq 0$ por lo cual para que esta ecuación sea 0 necesitamos que l_2^t sea 0, podemos seguir el mismo razonamiento para toda la fila hasta k. Notar que siempre termina porque tanto la diagonal de L como la de A nunca es 0.

Entonces probamos que la propiedad se cumple para la última fila de A y $\hat{L}$, tenemos que probarlo para el resto de la matriz.

L es de menor dimensión que A y además es la descomposición Cholesky de la submatriz de A correspondiente, además contiene toda la diagonal de A excepto la última fila, es decir que el índice de perfil siempre se alcanza adentro de esta submatriz de A. Por hipótesis inductiva entonces vale la propiedad entre la submatriz de A y L de lo cual sale que vale para la matriz A y termina la demostración.

Ejercicio 16

$\Rightarrow$) A sdp y B no singular. Como B es no singular sabemos que para cualquier $x \neq 0$, $Bx \neq 0$, esto también implica que $x^t B^t$ no es zero (por qué?) entonces

$$x^t B^t A B x$$

es lo mismo que

$$y^t A y$$

dónde $y = Bx$ y como A sdp esto es > 0.

$\Leftarrow$) Sale de manera análoga, argumentando primero que B nunca se anula y por lo tanto es no singular y luego de eso sale A sdp.

Ejercicio 17

Cómo A es sdp tenemos que es invertible y además es cuadrada asi que dado un $y \in \mathbb{R}^n$ existe un x tal que $Ax = y$ (y por lo tanto $y^t = x^t A$).

Ahora sea $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$, entonces

$$y^t A^{-1} y = x^t A A^{-1} A x = x^t A x > 0$$